
ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 4: Applications linéaires et matrices

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) connaître et manipuler les **représentations matricielles (canoniques)** des applications linéaires ;
- (O.2) calculer le **noyau** et **image** d'une application linéaire ;
- (O.3) déterminer si une application linéaire est **injective**, **surjective**, ou **bijective** ;
- (O.4) connaître le **lien entre SEL et équations matricielles**, et l'utiliser pour **calculer des solutions des équations matricielles**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- représentation matricielle (ou matrice) canonique d'une application linéaire
- noyau d'une application linéaire
- image d'une application linéaire

Noyau d'exercices

1.1 Applications linéaires et matrices

Exercice 1 (Produit entre une matrice et un vecteur)

Calculer $A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)$, avec

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 1$.

Exercice 2 (Noyau et image d'applications linéaires associés à des matrices)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si $\mathbf{w}$ est dans $\text{Ker}(A)$ et/ou dans $\text{Im}(A)$.

Exercice 3 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité I)

Rappel de la théorie

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si les applications linéaires associées aux matrices précédentes sont injectives, surjectives ou bijectives.

Exercice 4 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité II)

(a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 4z \\ 5x - 4y + 7z \\ 3x - 2y + 3z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}$$

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- (b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.
 (c) Déterminer ensuite le noyau $\text{Ker}(T)$ de T , i.e. le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 5 (Surjectivité et injectivité des endomorphismes)

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

- (a) Montrer que si T est surjective, alors T est aussi injective.
- (b) Montrer que si T est injective, alors T est aussi surjective.

1.2 Systèmes linéaires et équations matricielles
Exercice 6 (Forme paramétrique vectorielle)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Écrire l'ensemble solution de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Exercice 7 (Représentations vectorielles, équations matricielles et décomposition en solution particulière et homogène)

Considérons le SEL

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7, \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6, \end{cases}$$

et soit A la matrice carrée de taille 3 formée avec les coefficients des variables, avec le même ordre que dans le système précédent.

- (a) Écrire le système de façon équivalente comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .
- (b) Écrire le système sous forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (c) Résoudre l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (d) Écrire l'ensemble des solutions sous forme paramétrique vectorielle,
- (e) Écrire toutes les solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si elles existent, sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, où $\mathbf{p}$ est une solution particulière du système, et $\mathbf{v}$ est la solution générale du système homogène


Pour compléter la pratique
2.1 Applications linéaires et matrices
Exercice 8 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité III)

Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{pmatrix},$$

pour tous $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, et déterminer si elle est injective, surjective ou bijective.

Exercice 9 (Matrices canoniquement associées, injectivité et surjectivité IV)

On considère les applications linéaires suivantes :

- (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
- (b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$, pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$;
- (c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$;
- (d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
- (e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Dans tous les cas, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

2.2 Systèmes linéaires et équations matricielles

Exercice 10 (Décomposition en solution particulière et homogène)

Considérons les SEL

- (a)
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7, \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6, \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Pour chaque SEL, l'écrire sous la forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, et écrire ensuite toutes les solutions, si elles existent, sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, où $\mathbf{p}$ est une solution particulière du système, et $\mathbf{v}$ est la solution générale du système homogène.

Exercice 11 (Compatibilité)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Décrire l'ensemble des vecteurs $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible.

Exercice 12 (Compatibilité avec paramètres)

Déterminer les valeurs des paramètres réels a , b et c pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = a, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = b, \\ x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = c, \end{cases}$$

possède des solutions et les déterminer.



Bonus : un exercice plus compliqué

Exercice 13 (Formes échelonnées réduites et indépendance linéaire)

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite de la matrice A dans les cas suivants :

- (a) A est une matrice carrée de taille 3 avec des colonnes linéairement indépendantes ;
- (b) A est une matrice de taille 4×2 telle que la deuxième colonne de A n'est pas un multiple de la première colonne.
- (c) A est une matrice de taille 4×3 telle que les deux premières colonnes de A forment un ensemble libre de $\mathbb{R}^4$ et la troisième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premières colonnes de A .